

# ДММЭ

Экономические агенты:

- потребители
- производители
- государство
- торговля
- банки
- центральный банк

Рациональное поведение

$$f(x) \rightarrow \max$$

$$f(x, p, y) \rightarrow \max$$

- кроме ЦБ и гос-ва

$$g(x, p) \leq K(p, y)$$

$$x^*(p, y) - \text{для ЦБ и гос-ва}$$

Материальный баланс

Финансовый баланс

$\mathcal{A}$  - мн-во агентов

$P$  - продукты

~~$R$~~   $R$  - ресурсы

Ресурс - то, что в рамках данной модели не производится в экономике

$A \in \mathcal{A}$

$i \in P \cup R$

$$\frac{dQ_i^A(t)}{dt} = X_i^A(t) - C_i^A(t) - V_i^A(t) - J_i^A(t) - \sum_{B \in \mathcal{A}} X_i^{AB}(t)$$

динамическое  
уравнение

$0 \leq Q_i^A(t)$  - кол-во  $i$ -го товара у агента  $A$  в момент  $t$ .

$0 \leq X_i^A(t)$  производство

$0 \leq C_i^A(t)$  конечное потребление (в ед. в. (в.))

$0 \leq V_i^A(t)$  производственные затраты

$0 \leq J_i^A(t)$

Текущие  
капитальные

Текущие - расходуются в одном производственном цикле

$$X_i^{AB} > 0 \Rightarrow A \xrightarrow{i} B$$

$$X_i^{AB} < 0 \Rightarrow A \xleftarrow{i} B$$

$$X_i^{AB} = -X_i^{BA}$$

$$\frac{d}{dt} Q_i^A(t) \geq 0$$

$M$  - производственная мощность

$$Y = X - V \text{ - чистый выпуск}$$

$$Y \leq M$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{I}{b} - \mu M$$

износ

21.09.15

$$\frac{dQ_i^A}{dt} = \dots$$

$\rightarrow 0$

$$Y_i^A = C_i^A + I_i^A + \sum_{B \in A} X_i^{AB}$$

$$X_i^{AB} \sim I_i^{BA}$$

переход  
товара

переход &  
финанс

$$\Phi_i^{AB} = -\Phi_i^{BA}$$

$\tilde{X}, \tilde{V}, \tilde{Y}$  - денежные потоки

$\tilde{C}$  - объем товара в деньгах

$$\tilde{Y}_i^A \quad \tilde{C}_i^A \quad \tilde{Y}_i^A$$

$$\sum_{i \in \mathcal{D}} \tilde{Y}_i^A = \tilde{Y}^A$$

$$\tilde{Y}^A = \tilde{C}^A + \tilde{Y}^A + \sum_{i \in \mathcal{D}} \sum_{B \in \mathcal{X}} \Phi_i^{BA}$$

$$\tilde{Y}^A = \tilde{X}^A - \tilde{Y}^A$$

добавленная стоимость

объем производства

материальные затраты

финансовая стоимость

$$\frac{d\tilde{K}^A}{dt}$$

$$= \tilde{Y}^A - \mu^* \tilde{K}^A$$

амортизация

$$\sum_{A \in N}$$

$N$ -рассматриваемое мн-во агентов

$$\tilde{V}_P^N + \tilde{I}_P^N = \tilde{C}_P^N + \tilde{J}_P^N + \tilde{E}_P^N$$

платеж импорт, экспорт      основное макроэкономическое тождество.

валовой внутренний продукт

$$\tilde{I}_P^N = \sum_{A \in N} \sum_{B \in N} [\varphi^{AB}]_P^+$$

$\tilde{C}_P$  - конечное потребление

$\tilde{J}_P$  - накопление

$P_i(t)$

$$\Phi_i^{BA} = p_i X_i^{AB}$$

$$\tilde{V}_i^A = p_i (X_i^A - V_i^A)$$

$$\tilde{C}_i^A = p_i C_i^A$$

$$\tilde{J}_i^A = p_i J_i^A$$

$$I \subseteq D \cup R$$

$$K \subset I$$

"корзина"

$$P_I = \frac{\sum_{i \in K} P_i(t) \sum_{A \in A} Z_i^A(\theta)}{\sum_{i \in K} P_i(t) \sum_{A \in A} Z_i^A(\theta)}$$

$$\begin{cases} \theta = t \\ \theta = t_0 \end{cases}$$

индекс цен производителей  
индекс затрат  
индекс потреб. цен

$$Z \in \{X, C, I, \dots\}$$

$\theta = t_0 \rightarrow$  индекс Ласпейреса

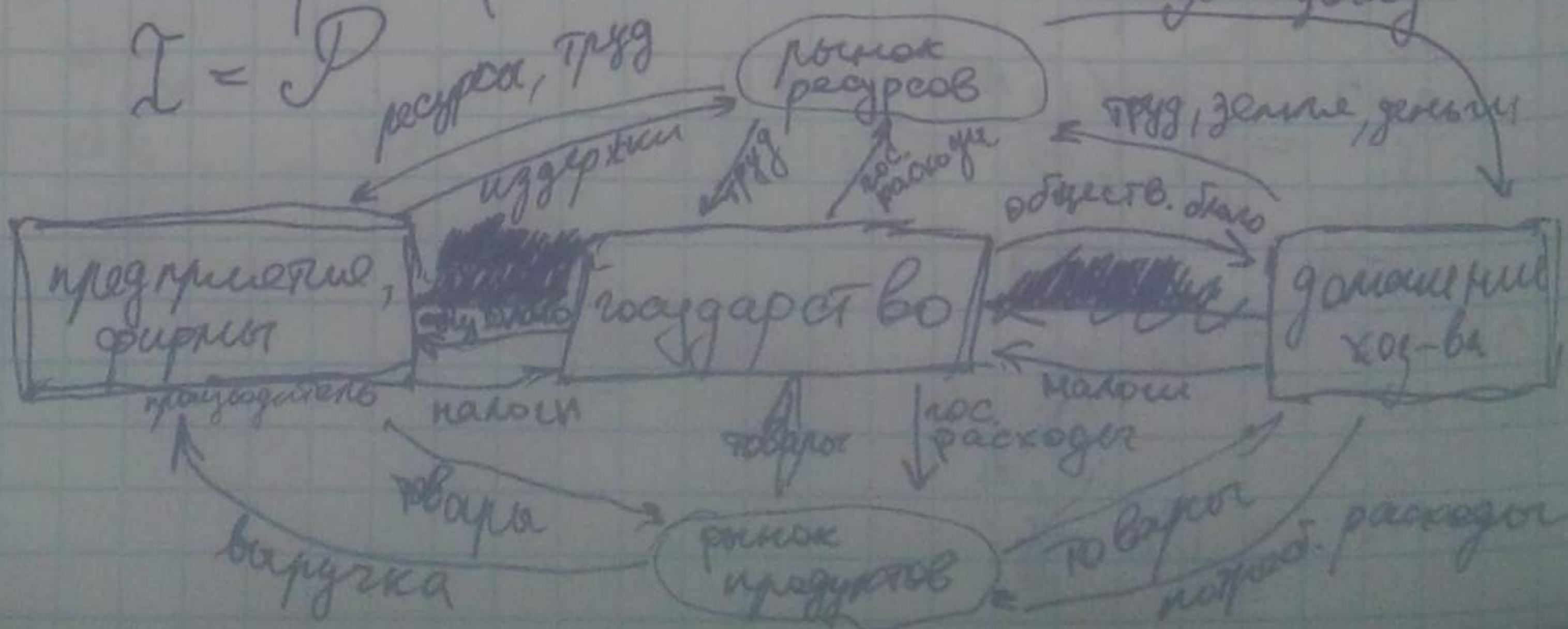
$\theta = t \rightarrow$  индекс Пааше

$$P_F = \sqrt{P_L \cdot P_P} \text{ - индекс коо-то там еще}$$

Сектор ВВП

$P_D$  доход

$$I = D$$



ВВП

28.09.15

СНС (система национальных счетов)

Пример

Пр-во шерстяных свитеров.

1. Овцеводческая ферма <sup>стоит</sup>

|                    | Стоимость проданн | Добавл. стоим.             |
|--------------------|-------------------|----------------------------|
| 1. Овцеводч. ферма | 60                | $60 - 0 = 60$<br>↑ условно |

|                     |     |                   |
|---------------------|-----|-------------------|
| 2. Обработка шерсти | 100 | $40 = (100 - 60)$ |
|---------------------|-----|-------------------|

|                 |     |                  |
|-----------------|-----|------------------|
| 3. Пр-во одежды | 125 | $25 = 125 - 100$ |
|-----------------|-----|------------------|

|                     |     |                  |
|---------------------|-----|------------------|
| 4. Оптовая торговля | 175 | $50 = 175 - 125$ |
|---------------------|-----|------------------|

|                       |     |                  |
|-----------------------|-----|------------------|
| 5. Розничная торговля | 250 | $75 = 250 - 175$ |
|-----------------------|-----|------------------|

8 Стоимость кон. продукта =  $\sum$  добавл. стоимость

- 1) Расчет ВВП по расходам - считаем по тому, на сколько купили
- 2) Расчет ВВП по доходам производителей

$$\textcircled{1} \text{ ВВП} = C + C_g + I + (E - I_m)$$

част. расходы
гос. расходы
инвестиции
экспорт
импорт

② По доходам:

- 1) Амортизация
- 2) косвенные налоги
- 3) зарплата
- 4) %, рента

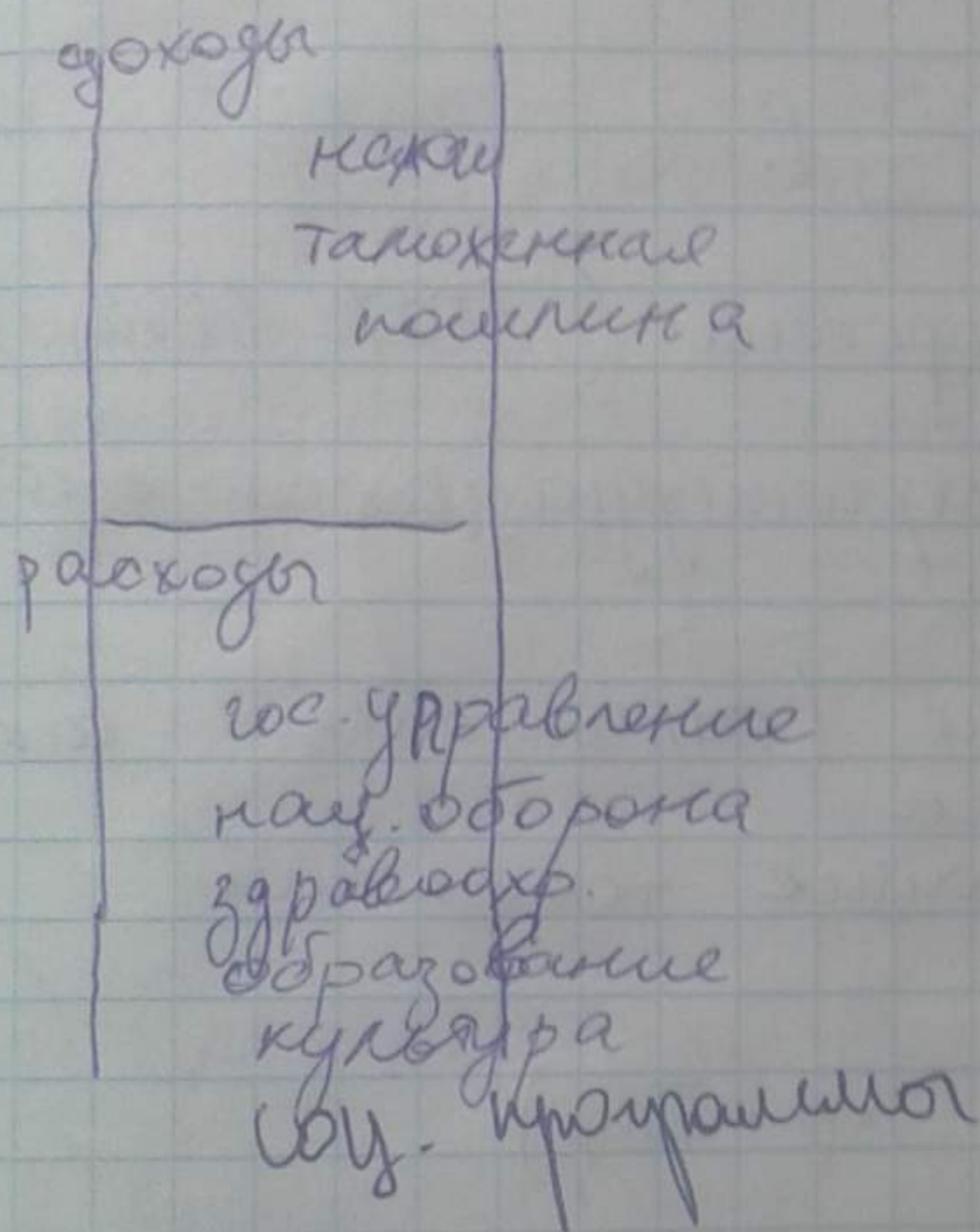
Функции гос-ва:

- 1) Законот, регулирование
- 2) Перераспределение дохода (+ косвенные субсидии)
- 3) Стабилизация

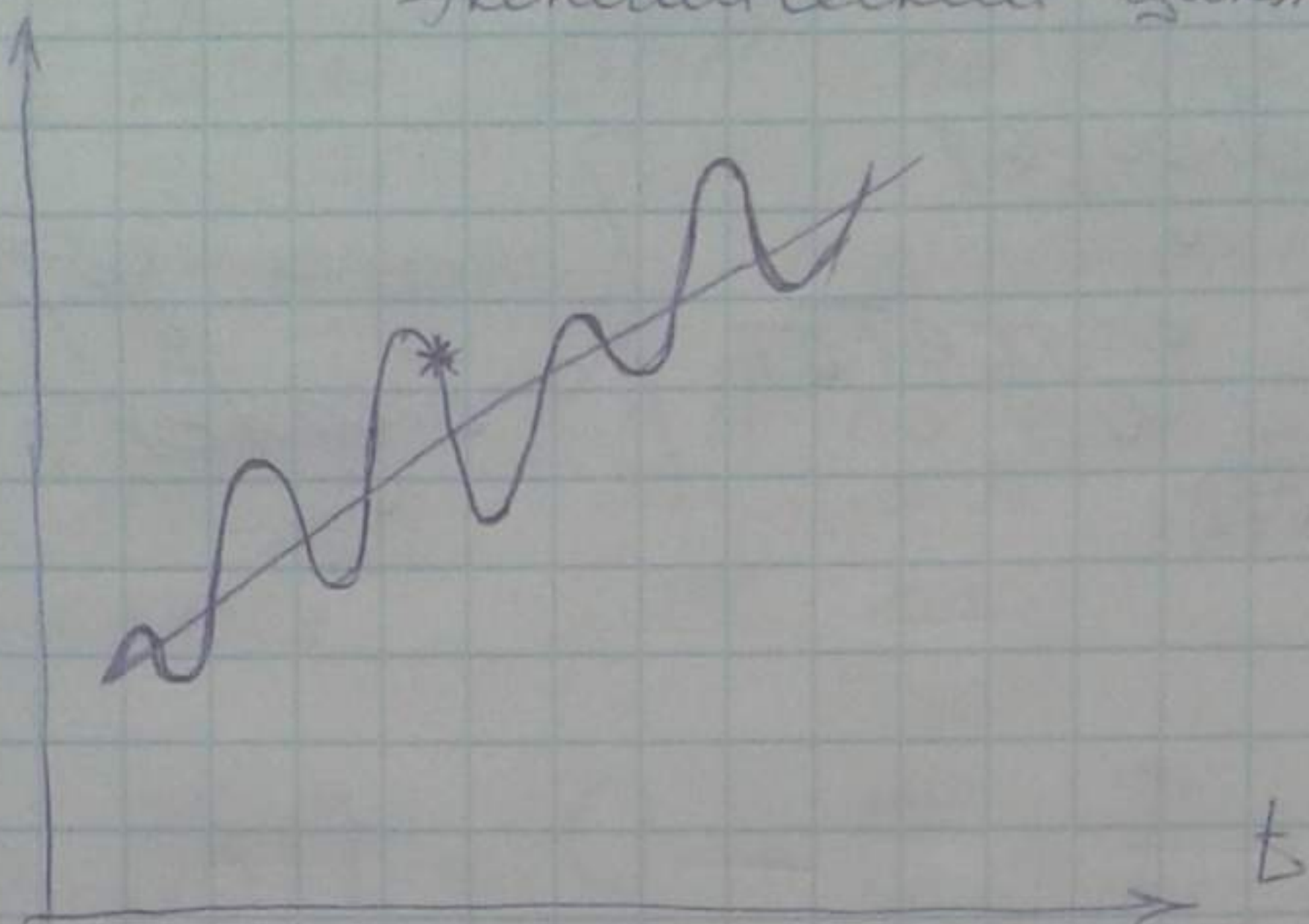
перераспределение дохода  $\nearrow$  гос. потребление  
трансфертные платежи

# бюджет

- федеральный бюджет
  - региональные бюджеты
  - местные бюджеты
- } консолидированный бюджет



## Экономический цикл



Период Великой депрессии (1927-1933)

Экономика - саморегулирующаяся система

- Синтетические волокна
- Прогресс в медицине (антибиотики, вакцины)
- Компьютерная техника
- Ядерно- и термоядерные технологии

$$Y = C + I + G + (Exp - Imp)$$

США, 1993

|                  | падение цен | падение производства |
|------------------|-------------|----------------------|
| с/х орудия       | 7%          | 80%                  |
| трансп. средства | 18%         | 80%                  |
| цемент           | 19.5%       | 64%                  |
| машин и авто     | 20%         | 82%                  |
| автомобили       | 30%         | 40%                  |
| текстиль         | 43%         | 30%                  |

|            |     |     |
|------------|-----|-----|
| бензин     | 55% | 20% |
| с/х товара | 64% | 3%  |

## Инфляция

1. Инфляция спроса.
2. Возникшая раньше издержек или уменьшением предложения.

военные расходы  $\nearrow$   $\rightarrow$  рост расходов  $\rightarrow$   
инфляция спроса  $\rightarrow$  рост расходов на топливо  $\rightarrow$   
инфляция издержек.

## Безработица

- 1) Фрикционная безработица (в поиске)
  - 2) Структурная
  - 3) Циклическая
- неизбежны,  
естественный  
уровень безработицы

$$\frac{\text{Безработные}}{\text{ЭАН}} = \text{ур безработицы}$$

экономика экономика экономика

$$\text{ЭАН (рабочая сила)} = \text{работающие} + \text{безработные} =$$

$$= \text{население} - \text{неактивные 16 лет} - \text{воинский состав}$$

|            |     |     |
|------------|-----|-----|
| бензин     | 55% | 20% |
| с/х товара | 64% | 3%  |

## Инфляция

1. Инфляция спроса.
2. Возникшая ростом издержек или уменьшением предложения.

военные расходы  $\nearrow$   $\rightarrow$  рост расходов  $\rightarrow$   
инфляция спроса  $\rightarrow$  рост расходов на топливо  $\rightarrow$   
инфляция издержек.

## Безработица

- 1) Фрикционная безработица (в поиске)
  - 2) Структурная
  - 3) Циклическая
- неизбежны,  
естественный  
уровень безработицы

$$\frac{\text{Безработные}}{\text{ЭАН}} = \text{ур. безработицы}$$

всего занятых

$$\text{ЭАН (рабочая сила)} = \text{работавшие} + \text{безработные} =$$

$$= \text{население} - \text{недееспособные 16 лет} - \text{военные}$$

в составе рабочей силы

26.10.15.

$E \in A$  - эмитент

$N^A$  запас денег

$$\begin{aligned} \frac{dN^A}{dt} = & \sum_{B \in A} \sum_{i \in D \cup R} \Phi^{BA} + \\ & + \sum_{B \in A} \left( T^{BA} - T^{AB} + \right. \\ & \quad \left. \underbrace{\frac{dL^{BA}}{dt} - \frac{dL^{AB}}{dt}}_{\text{кредиты/депозиты}} + \underbrace{R^{AB} - R^{BA}}_{\% \text{ по курсу}} \right) \end{aligned}$$

(переводы  
(вос. платежи))

$$A \neq E$$

$$\Phi_i^{BA} = -\Phi_i^{AB}$$

$$\frac{dK^A}{dt} = \dots$$

$$\frac{d\tilde{K}^A}{dt} = \tilde{I}^A - \mu^* \tilde{K}^A$$

$\tilde{K}$  - балансовая стоимость эк. фондов  
 $A$  - производитель,  $A = F$

$$\tilde{K}^A = \tilde{C}_T^A + \tilde{J}_P^A + \sum_{i \in D} \sum_{B \in A} \varphi_i^{BA}$$

$= \{A=F=0\}$

$$\tilde{X}_D^A = \tilde{V}_D^A$$

$$\sum_{i \in D} \sum_{B \in A} \varphi_i^{BA} = \tilde{Y}_D - \frac{d\tilde{K}^F}{dt} - \mu^* \tilde{K}^F$$

$$\int_{t^F}^t \frac{dN^F}{dt} + \sum_{B \in A} \frac{dL^{FB}}{dt} + \frac{d\tilde{K}^F}{dt} = \sum_{B \in A} \frac{dL^{BF}}{dt} + \sum_{B \in D} (T^{BF} - T^{FB}) +$$

$$+ (\tilde{Y}_D^F - \tilde{S}^F - \mu^* \tilde{K}^F) + \sum_{B \in A} (R^{BF} - R^{FB})$$

↑  
прибыль ( $\sigma^F$ )

$$N^F(t) + \sum_{B \in A} L^{FB} + \tilde{K}^F = \sum_{B \in A} L^{BF} + U^F + A^F + A_0^F$$

↑  
установка  
фонд  
↓  
"  $\sum \sum T^{BF}$   
акционерский  
капитал

$U^F = \int (\sigma - \sum^{FB})$  - все прибыль меньше  
все трансферты (налоги и дивиденды) -  
- нераспределенная прибыль

не потребителей:

$$\sum_{i \in \text{Вс}} \sum_{j \in \text{Вс}} \Phi_{ij}^{\text{ВН}} + \sum_{\text{Вс}} T^{\text{ВН}} + \sum_{\text{Вс}} \frac{dL^{\text{ВН}}}{dt} +$$

дохода

трансферты  
(предприятие + гос-во)

$$+ \sum_{\text{Вс}} R^{\text{ВН}}$$

%  
по депозитам

$$= \tilde{C}^{\text{Н}}$$

конечное  
потребление

$$+ \sum_{\text{Вс}} T^{\text{ВН}} + \sum_{\text{Вс}} \frac{dL^{\text{ВН}}}{dt} +$$

налоги

средств в банках

$$+ \frac{d}{dt} N^{\text{Н}}$$

$$N^{\text{А}} \geq 0, \text{ если } A \neq E.$$

Если  $A = E$ :

E-эмиссия

$$\frac{dN^{\text{E}}}{dt} = \overset{\text{эмиссия}}{\downarrow} \varepsilon^{\text{E}} + \sum_{\text{Вс}} \left( \frac{d}{dt} L^{\text{BE}} - R^{\text{EB}} - \frac{dL^{\text{EB}}}{dt} + R^{\text{BE}} + T^{\text{BE}} - T^{\text{EB}} \right)$$

$$N^{\text{E}} + \sum_{\text{Вс}} L^{\text{EB}} = \sum_{\text{Вс}} L^{\text{BE}} + O^{\text{E}} + W^{\text{E}}$$

$$W^{\text{E}} = \int_{t^{\text{E}}}^t \varepsilon^{\text{E}}(\tau) d\tau$$

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{\text{Вс}} N^{\text{А}} - W^{\text{E}} \right) = 0$$

$M$  - платёжные средства

$\phi_{im}$ ,  $m \in M$

$$\bar{X}_i^{AB} = \sum_{m \in M} X_{im}^{AB}$$

$X_{im}$  - кол-во товара, отданное в обмен на платёжное средство  $m$

$$X_{im}^{AB} = -X_{im}^{BA}$$

$$\phi_{im}^{BA} = \phi_{im} X_{im}^{AB}$$

$$\phi_{im}^{AB} = -\phi_{im}^{BA}$$

$m_0$  - базовое средство

$\forall m \in M \quad \exists \mathcal{L}_m$  - курс обмена

$\mathcal{L}_{m_0} = 1$  (обмен на саму себя)

$A, m$        $B, n$

$$V_{nm}^{AB} = -V_{nm}^{BA}$$

$$\frac{V_{nm}^{AB}}{\mathcal{L}_n} = -\frac{V_{nm}^{AB}}{\mathcal{L}_m}$$

денежная  $n$

денежная  $m$

$$\frac{dN_m^A}{dt} = \varepsilon_m^A + \sum_{B \in \mathcal{M}} \sum_{i \in \mathcal{P}_B} \Phi_{im}^{BA} - \frac{1}{\mathcal{L}_m} \sum_{B \in \mathcal{M}} \sum_{n \in \mathcal{M}} (V_{nm}^{AB} - V_{mn}^{AB}) +$$

$$+ \sum_{B \in \mathcal{M}} \left( \frac{dh_m^{BA}}{dt} - \frac{dL_m^{AB}}{dt} + R_m^{BA} - R_m^{AB} + T_m^{BA} - T_m^{AB} \right)$$

$$1 \cdot \mathcal{L}_m, \sum_{m \in \mathcal{M}}, \int :$$

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_m N_m^A + \sum_{B \in \mathcal{M}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_m L_m^{AB} = \sum_{B \in \mathcal{M}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_m L_m^{BA} + W_{\mathcal{M}}^A \oplus$$

$$\mathcal{L}_m(t) = !$$

$$\left[ U_{\mathcal{M}}^A = \int_{t_A}^t \left( \Pi_{\mathcal{M}}^A - \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{B \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_m(\tau) T_m^{AB}(\tau) \right) d\tau \right] \left\{ \int_{t_A}^t \sum_{m \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_m(\tau) \varepsilon_m^A(\tau) d\tau \right\}$$

//  $\mathcal{L}_m = 0$ , когда нет энергии

$$\oplus (U_{\mathcal{M}}^A + A_{\mathcal{M}}^A + A_0^A)$$

нераспределенная  
энергия

$$A_{\mathcal{M}}^A = \int_{t_A}^t \sum_{B \in \mathcal{M}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_m T_m^{BA}$$

$$\Pi_{\mathcal{M}}^A = \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{B \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_m (R_m^{BA} - R_m^{AB}) +$$

$$+ \sum_{m \in \mathcal{M}} \frac{d\mathcal{L}_m(t)}{dt} \left( N_m^A + \sum_{B \in \mathcal{M}} (L_m^{AB} - L_m^{BA}) \right) A_{\mathcal{M}}^A =$$

$$= \int \sum_B \sum_m x_m T_m^{BA}$$

прибыль от переоценки

$$M = \{P, \$\}$$

изменение золотовалютного резерва

$$x_{\$} N_{\$}^E + \dots = W_m^E + \frac{d x_{\$}}{dt} N_{\$}^E + \dots$$

актив ЦБ

кредит

Просуммировать по всем агентам →

→ платежный

баланс  
(E-I)/x\_{\\$}

сформат 3/12

сальдо ЗП:  
→ за границу  
← из-за границы

$$\frac{dN_{\$}^W}{dt} = \sum_{A \notin N} \sum_{i \in P} \Phi_{\$}^{AN} + \sum_{A \notin N} \sum_{i \in R} \Phi_{\$}^{AN} +$$

$$+ \sum_{A \notin N} \left( \frac{dL_{\$}^{AN}}{dt} - R_{\$}^{NA} - \frac{dL_{\$}^{NA}}{dt} + R_{\$}^{AN} \right) +$$

$$+ \sum_{A \notin N} (T_{\$}^{AN} - T_{\$}^{NA})$$

- 1)  $R \cup \mathcal{Q}$
- 2)  $A - ?$
- 3) Балансы - ?

4) ограничения

5) выбор

однопродуктовая модель

$$E - I = 0$$

$$Y = C + G + J$$

потребление  
гос. сек.

← продуктовой  
баланс

$L$  - труд

$A - P \cup T \cup H \cup B \cup \{g\} \cup \{c\}$   
 произв. торговля гос. сек-ва банк сек-во и.б.

Производитель

$a \in P$

$L^a$

- затраты

гос. сек-ва

$\leftarrow \Phi_Y^T$

$Y^a$

- продукт

→ торговля

$\Phi_{LH}^a$

- з/н

$\Phi_{YT}^a$

← торговля

$\tilde{p}$  - цена

$$\Phi_Y^{\bar{a}} = \tilde{p} y^a$$

$$\Phi_J^{aT} = \tilde{p} j^a$$

$$\Phi_L^{aH} = \underbrace{S L^a}_{3/n}$$

← ставка  $g/n$  ???

$$\frac{dN^n}{dt} = \Phi_Y^{\bar{a}} - \Phi_J^{aT} - \Phi_L^{aH} - T^{aH} - T^{ag} +$$

$$+ \frac{dL^{Ba}}{dt} - \frac{dL^{aB}}{dt} - R^{aB}$$

$$Y^P = Y, \quad L^P = L$$

$$\sum_{a \in P} Y^a = \sum_{a \in P} L^a$$

Торговля

покупает  $V^a$

$$\Phi_Y^{aP} = \tilde{p} V^a$$

$$V^T = \sum_{a \in T} V^a = \sum_{a \in P} Y^a = V^P = Y$$

$$V^T = C + J + G \rightarrow \{P, H, g\}$$

$$\Phi_C^{Ha}, \Phi_G^{ga}, \Phi_j^{Pa}$$

←  
горизонт

$$\frac{dN^a}{dt} = \Phi_{\mathcal{I}}^{Pa} + \Phi_{\mathcal{C}}^{ga} + \Phi_{\mathcal{C}}^{Ha} - \Phi_{\mathcal{Y}}^{aP} - \frac{dL^{Ba}}{dt}$$

$$\sum_{a \in T} \Rightarrow \frac{dN^T}{dt} + \frac{dL^{BT}}{dt} = 0$$

09.11.15.

Домашнее хозяйство.

$a \in H$  — мн-во г.х.

$$\Phi_{\mathcal{C}}^{aT} = p C^a$$

$$C^H = \sum C^a = C$$

↓  
потребительские  
расходы

зарплата  
матр

$$\Phi_L^{Pa} = s L^a$$

↑  
трудовой  
ресурс

$$\sum L^a = L^H = L^P = L$$

суммарный  
объем = const  
в рамках модели

$$\frac{dN^a}{dt} = \Phi_L^{Pa} - \Phi_{\mathcal{C}}^{aT} + \underbrace{T^{Ba} + T^{Pa}}_{\text{зубыгеноген}} - T^{ag} + T^{ga} -$$

$$- \frac{dL^{aB}}{dt} + \frac{dL^{Ba}}{dt} - R^{aB} + R^{Ba}$$

взаимодейств  
с банками

Ba

# Государство

$$\frac{dN^a}{dt} = -\Phi_a^{gT} + \underbrace{T^{cg} + T^{Bg} + T^{Pg}}_{\text{налоги}} + T^{Hg} - \underbrace{T^{gH}}_{\text{переводы в/из гос. бюджета}}$$

$$\left[ \Phi_a^{gT} = p C_a \right]$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{dL^{cg}}{dt} - R^{gc}$$

внутренний долг центрального банка  
проценты по гос. долгу

## Коммерческие банки

a ∈ B - мы - во к.б.

$$\begin{aligned} \frac{dN^a}{dt} = & -T^{aH} - T^{ag} + \left( -\frac{dL^{aP}}{dt} + \frac{dL^{Pa}}{dt} \right) + \\ & + \frac{dL^{Ta}}{dt} + \frac{dL^{Ha}}{dt} - \frac{dL^{aH}}{dt} + \\ & + \left( \frac{dL^{Ba}}{dt} - \frac{dL^{aB}}{dt} + \frac{dL^{Ca}}{dt} - \frac{dL^{aC}}{dt} \right) + \\ & + R^{Pa} + R^{Ha} - R^{aH} - (R^{Ba} - R^{aB}) - R^{aC} \end{aligned}$$

расчетное сета термов  
взаимодействие с населением  
взаимодействие с другими банками  
взаимодействие с ЦБ  
накопительные кредиты (+ или - суммы и т.д.)

## Центральный банк

Если всё сложить, получим  
баланс для ЦБ, плюс величина  
резервов

$$N^c = -W^c$$

бьем капи-      объем  
тали в ЦБ      эмиссии

$$W^c = N^p + N^T + N^M + N^g + N^B$$

$$L^{CB} + L^{CG} = L^{BC} + W^c + O^c$$

кредиты банкам      резервы  
и государству      к банкам

$$\frac{dO^c}{dt} = \underbrace{R^{BC} + R^{GC}}_{\text{прирост}} - \underbrace{T^{CG}}_{\text{трансферты}}$$

$\varphi$  — норма резервирования

$$L^{BC} \geq \varphi (L^{MB} + L^{PB} + L^{TB})$$

сумма всех средств,  
привлеченных от всех  
актов всеми банками

# Теория потребления

$\mathbb{R}_+^n$  — пространство товаров

$(x_1, \dots, x_n)$   
ассортимент товаров

$$X \subseteq \mathbb{R}_+^n$$

мн-во, на  
котором опреде-  
лены интересы  
потребителя

$\forall x, y \in X$  потребитель может  
сравнить  $x$  и  $y$

$\succsim$

1)  $x \succsim x$

2)  $x \succsim y, y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$

3)  $\forall x, y$  либо  $x \succsim y$

либо  $y \succsim x$

либо что-то и другое

$\succ$  (отношение предпочтения) — непрерывно на  $X$ :

$\{x, y \mid x \succ y\}$  — открыто на  $X \times X$

$f_1, f_2$  — непрерывны

$x \succ y$ , если  $f_1(x) > f_1(y)$

лексикографически

$$x \succsim y, \text{ если } f_1(x) > f_1(y) \\ \text{либо если } f_1(x) = f_1(y) \\ \text{то } f_2(x) > f_2(y)$$

Т. (Дебре).  $X$  - связно,  $\succsim$  - непр.  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists u(x) \text{ ; } u: X \rightarrow \mathbb{R}^1 \text{ ; } \\ \text{ф-я полезности}$$

$$\forall x, y : x \succsim y \quad u(x) \geq u(y)$$

Если  $X$  :  $\exists x \in X : x \succsim y \quad \forall y \in X$ ,

то  $x$  - точка насыщения.

Если  $\nexists$ , то не насыщенность

$f(u(x))$  - ф. полезности

$$\exists \exists u(x)$$

$$X = \mathbb{R}_+^n$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$$

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} < 0$$

$$K > 0$$

кон-во  
предела

$$p \in \mathbb{R}_+^n$$

$$u(x) \rightarrow \max$$

$$\langle x, p \rangle \leq K \Rightarrow \exists! x^*(p, K) - \text{опт}$$

$$x \geq 0$$

↑  
если ф-я  
вогнута

$$L(x, \lambda) = u(x) - \lambda (\langle p, x \rangle - K)$$

$$\exists \lambda^*, x^*(p, K) : \text{лок. макс. ф-ии Лагранжа}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \begin{cases} \langle p^*, x^* \rangle - K = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) - \lambda^* p_i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$> 0 \Rightarrow \lambda^* > 0$$

$p_n$  — узлы, где-то по  $p_n$

$\mathbb{R}$

① нуль, 0  
② нуль, 0  
③ нуль, 0

$$\sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial p_n} \right)^* + x_n^* = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{\partial x_j}{\partial p_n} \right)^* - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} \right)^* p_i = \begin{cases} 0, & i=1, \dots, n-1 \\ \lambda^*, & i=n \end{cases}$$

$$u = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -p \\ -p & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} \right)^* \\ \left( \frac{\partial x}{\partial p_n} \right)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n^* \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial p_n}$$

$$(2) \Rightarrow du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \lambda^* \sum_{i=1}^n p_i dx_i = 0$$

~~нуль, 0~~

$$(1) \Rightarrow dK = \sum_{i=1}^n x_i dp_i + \sum_{i=1}^n p_i dx_i = \sum_{i=1}^n x_i dp_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial p_n} = x_n$$

$$\textcircled{4} \sum p_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial p_n} \right)^* + x_n^* - \frac{\partial K}{\partial p_n} = 0$$

II { ③ — K меняется вместе с  $p_n$   
④

$$\begin{aligned} \text{I} \rightarrow & 1) \frac{\partial}{\partial p_n} \\ \text{II} \rightarrow & 2) \left( \frac{\partial}{\partial p_n} \right)_{\text{comp}} \\ & 3) \frac{\partial x^*}{\partial K} \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{\partial x^*}{\partial p_n} = \left( \frac{\partial x^*}{\partial p_n} \right)_{\text{comp}} - \left( \frac{\partial x^*}{\partial K} \right) x_n^* \right.$$

уравнение Слуцкого  
(исследование изменения спроса от  
изменения цен)

$$\left( \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n} \right)_{\text{comp}} < 0$$

при конъюнктурном  
увеличении цен на  
товар спрос все равно  
падает (конъюнктура перестраивается)

$$\left( \frac{\partial x^*}{\partial K} \right) > 0$$

ценности

(но! зависит  
от уровня дохода K)

$$< 0$$

мароценный

исследование локальных св-в решения!

$$\left( \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} > 0$$

при конъюнктурном увели-  
чении стоимости на  $i$ -й  
товар растет спрос на  $j$ -й  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  товары взаимодополняемые

$$\left( \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right)_{\text{comp}} < 0 \Rightarrow i, j - \text{взаимодополняемые}$$

(зубная щетка и паста)

16.11.2015

$$X \subseteq \mathbb{R}_+^n, \quad p \in \mathbb{R}_+^n$$

$$u(x)$$

$$K(p)$$

$$\tilde{X}(p) = \{x \mid x \in X, \langle x, p \rangle \leq K(p)\}$$

$$\Phi(p) = \begin{cases} x, & x \in \tilde{X}(p), u(x) = \max_{y \in \tilde{X}(p)} u(y) \\ \emptyset, & \text{если max не достигается} \end{cases}$$

функция спроса

$$\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \in X$$

если  $\exists i: \{x_i^k\} \rightarrow \infty$

то  $\{x_j^k\} \rightarrow \infty \quad \forall j \neq i$

$$\Rightarrow \forall p \neq 0 \quad \tilde{X}(p) \text{ - ограничено}$$

Свойство однородности:  $K(\lambda p) = \lambda K(p) \quad \forall \lambda > 0$

$$\Rightarrow \tilde{X}(\lambda p) = \tilde{X}(p)$$

$$\Phi(\lambda p) = \Phi(p)$$

Описание производства.

$$F(x) : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^m$$

$(x, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $y \in F(x)$  - производственный процесс

Прибыль  $y(x) : \langle y - x, p \rangle = \max_{(x', y') \in \Gamma} \langle y' - x', p \rangle$   
 $p \in \mathbb{R}_+^m$

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}_+^n, y \in F(x)\}$$

$Y = \{y - x \mid x \in \mathbb{R}_+^n, y \in F(x)\}$  - технологическое множество (т. отображение)

Модель Леонтьева:  $F(x) = \{y \mid y \leq x, y \geq 0\}$

Модель Неймана:  $F(x) = \{y \mid \exists z \geq 0 : y = zB, zA \leq x\}$

(без трудовых затрат и затрат капитала)

Производственные функции

$$f : D \rightarrow U, \quad D \subseteq \mathbb{R}_+^n, \quad U \subseteq \mathbb{R}_+^m$$

как правило сразу нелинейна

$$\sum_{m=1}^n = 1$$

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

Двухфакторная производственная ф-я

$$Y = F(K, L)$$

$K$  — основные средства (ф-са, на которых произв. прод.)

$L$  — трудовые ресурсы

$Y$  — выпуск

$$Y = AK^\alpha L^\beta \text{ — ф-я Кобба-Дугласа}$$

$$A > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$$

Однородна, при пропорциональном увеличении  $K$  и  $L$  пропорционально увеличивается производство (старая простая модель)

Да

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$$

коэф. (уст)

$$y = \frac{Y}{L} \quad - \text{среднее произв-ть труда} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{основные хар-ки}$$

$$z = \frac{K}{L} \quad - \text{фондозадача}$$

$$\frac{K}{L} \quad - \text{капитало- (фондо-) обеспеченность труда}$$

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} \quad - \text{коэф. эластичности по основ-} \\ \text{ным факторам}$$

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} \quad - \text{коэф. эластичности по труду}$$

Если  $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\delta F(K, L) \quad \forall \lambda > 0$ , то  $F(K, L)$  - однородная в степени  $\delta$

$\delta = 1$  - линейная однородность

$$Y = \frac{\partial F}{\partial K} K + \frac{\partial F}{\partial L} L$$

ур-е Эйлера

Произв. ф-я оуморна  $\Rightarrow$  ур-е Эйлера

$\frac{\partial F}{\partial L} \sim$  зарплата на одного работника

$\frac{\partial F}{\partial L} L$  - доход

$\frac{\partial F}{\partial K} K$  - стоимость производственных мощностей (с. основных фондов)

$$k = \frac{K}{L}$$

$$f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

$$y = \frac{Y}{L}$$

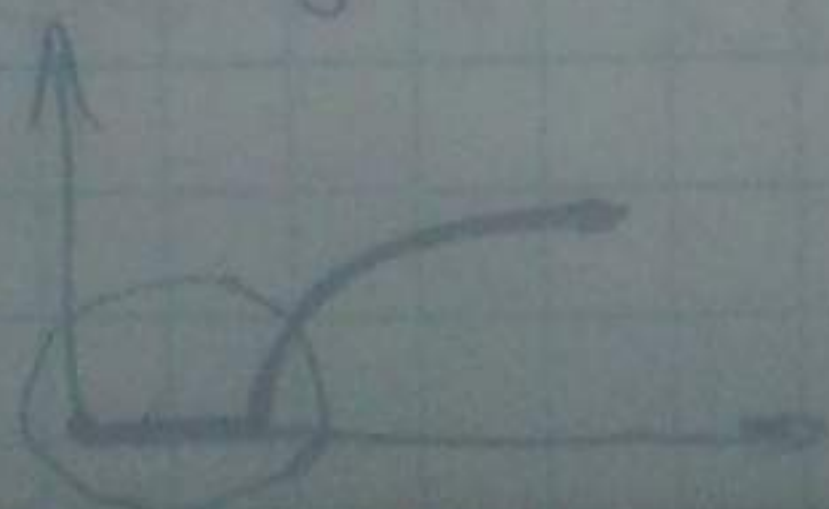
$$y = f(k)$$

$$f'(k) > 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f''(k) < 0$$

Уморта (затрати)  $(0 \neq 0)$  ;



$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \infty$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$$

неоклассические  
производственные  
функции

$$S_k = \frac{dk}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial k}$$

какое кол-во ручного  
труда может заме-  
нить автоматизацию

$$dY = \frac{\partial F}{\partial k} dk + \frac{\partial F}{\partial L} dL$$

$S_k$  - предельная норма замены трудовых  
ресурсов основными ресурсами

$S_L = \dots$

$$S_L \cdot S_k = 1$$

$$S_k = \frac{f(k)}{f'(k)} - k$$

■ Эластичность замещения (э.з.)

$$\sigma_k^{-1} = \frac{dS_k}{dk} \cdot \frac{k}{S_k} = \frac{dS_k/S_k}{dk/k}$$

'g.d. = const  $\rightarrow$  ф-я с постоянной э.з.:

$$f = C_1 \left( k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \text{ если ф-я линейно однородна}$$

Если не лим. однородна, то

$$S_K = \frac{\delta f(k)}{f'(k)} - k$$

$$f = c_1 \left( k^{\frac{\delta-1}{\delta}} + c \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}}$$

$$f(K, L) = A(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-\frac{\delta}{\rho}}$$

$$\rho = \frac{1-\delta}{\delta}$$

CES (constant elasticity of substitution)

VES (variable — — —)

$$f(K, L) = A(\delta K^{-\rho_1} + (1-\delta)L^{-\rho_2})^{-\frac{\delta}{\rho}}$$

(коэф. должны быть:  $\rho$ -е возмущения)

$$(Y^{\text{набл}} - Y^F)^2 \rightarrow \min - \text{один из}$$

способов нахождения  $\rho$ -ов

# Модель Вальраса

2 сектора экономики

←  
производитель

→  
потребитель

система замкнута, в ней образуются  
продукты производства  
первичные факторы пр-ва (земля, труд и т.д.)

цены - равновесные

23.11

$l$  потребителей  
 $m$  производителей  
 $n$  типов товара

$K_i(p)$  - доход  
 $\Phi_i(p)$  - спрос

Производитель

Земельный  $\rightarrow Y_k \in \mathbb{R}^n$  - вектор производственных возм-тей

$\Psi_i(p)$  - предложение

$$K_i(p) = \langle v_i, p \rangle + I_i(p)$$

$$Y^{\text{def}} = \sum_{k=1}^m Y_k \quad - \text{совокупное техн. нч-во}$$

$$\Psi_0(p) = \sum_{k=1}^m \Psi_k(p) \quad - \text{совокупное предложение}$$

$$\bar{\Psi}_0(p) = \{y \mid y \in Y, \langle y, p \rangle = \max_{y' \in Y} \langle y', p \rangle\}$$

$$\boxed{\bar{\Psi}_0(p) = \Psi_0(p)}$$

т.к. задача оптимизации линейна

Ⓢ фак-во включения в одну

сторону, потоки в другую

(взять вектор из одной нч-ва,

д-ть включение в другое.

! подробно рассмотреть нч-ва  $Y_k$ )

$$\sum_{i=1}^l I_i(p) = \langle y, p \rangle$$

градуировать  $\rightarrow$  нормировать

Опр.  $(y_1^*, \dots, y_m^*, x_1^*, \dots, x_\ell^*, p^*)$  -

конкурентное равновесие:

$$\forall y_k^* \in \Psi_k(p^*)$$

$$\forall x_i^* \in \Phi_i(p^*)$$

$$\sum_{k=1}^m y_k^* + \sum_{i=1}^{\ell} b_i \geq \sum_{i=1}^{\ell} x_i^* \quad (\text{предлож.} \geq \text{спрос})$$

$$\langle p^*, \sum_{k=1}^m y_k^* + \sum_{i=1}^{\ell} b_i \rangle = \langle p^*, \sum_{i=1}^{\ell} x_i^* \rangle$$

$p^*$  - вектор равновесных цен

$\Phi(p) = \sum_{i=1}^{\ell} \Phi_i(p)$  - функция совокупного спроса

$$\Psi(p) = b + \sum_{k=1}^m \Psi_k(p), \quad b = \sum_{i=1}^{\ell} b_i$$

$\Psi(p)$  - совокупное предложение

если  $\Psi(p) = \Phi(p)$ , то закон Вальраса выполнен

$$\langle p, x \rangle \leq \langle p, y \rangle$$

$$x \in \Phi(p)$$

$$y \in \Psi(p)$$

$\forall p$

Закон

Вальраса

в равновесии равенство

доход - потр. = доход продав. (расписать  $\langle p, y \rangle$ )  
 За счет этого  $\sum I_i(p) = \langle p, y \rangle$  (в расписании в начале и конце)

$(y^*, x^*, p^*)$  - конкур. равновесие

$$y^* \in \Psi(p^*)$$

$$x^* \in \Phi(p^*)$$

$$x^* \leq y^*$$

$$\langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle$$

Модель Эрроу - Дебре

Потребитель:

показывает,  
как  
потребитель  
получает  
доход

$$1) K_i(p) = \langle p_i, v_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_{ij} \langle p_i, y_j \rangle$$

$$\forall j: \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$$

$$2) X_i \subseteq \mathbb{R}_+^n, \quad \forall i = \overline{1, l}$$

вогнута, замкн., огранич.,

$$\{x^k\} \in X_i, \quad x_j^k \rightarrow \infty \Rightarrow x_i^k \rightarrow \infty \quad \forall i$$

$$3) M_i(x) \text{ непрерывна, вогнута на } X_i$$

$$4) \text{потребители не насыщаются}$$

5) несущие свойства,  
по которым  
рас-во

$$5) \forall i \quad \exists \bar{x}_i \in X_i: \bar{x}_i \leq v_i$$

(т.е. у всех есть ненулевые запасы всех товаров)

Производитель:

- 1)  $Y_k$  — компакт,  $0 \in Y_k$
- 2)  $Y = \sum_{k=1}^m Y_k$  — выпукло

Т. В модели Эрроу-Дэбре  
существует конкурентное равновесие

Лемма (Рейла)

$$P = \{p \mid p \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{j=1}^n p_j = 1\}$$

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{R}_+^n$

$$\varphi : P \rightarrow 2^P$$

$\varphi$  — многозначное отображение,  
сопоставляющее каждому  
мн-ву  $p$  некоторое  
подмножество

1) непрерывно сверху

$$\forall p \in P \quad \varphi(p) \neq \emptyset, \varphi(p) \text{ выпукло}, \varphi(p) \subseteq P$$

$$2) \forall u \in \varphi(p) \quad \langle p, u \rangle \geq 0$$

$$p_k \rightarrow p_0, \quad p_k \in P$$

$$y_k = \varphi(p_k), \quad y_k \rightarrow y_0 \Rightarrow y_0 = \varphi(p_0)$$

$$\text{Тогда } \exists p^* \in P: u(p^*) \cap P_+ \neq \emptyset$$

$$(x_1^*, \dots, x_k^*, y_1^*, \dots, y_n^*, p^*)$$

$$x = (x_1, \dots, x_\ell)$$

$$x \in X = \prod_{i=1}^{\ell} X_i$$

Опр.  $x$  - оптимально по Парето  
если  $\forall x' \in X$

$$\begin{cases} x_j \geq x'_j, \forall j \\ \exists j: x_j > x'_j \end{cases}$$

Первый  
теорема  
на конкурентном

I. Если  $(x_1^*, \dots, x_\ell^*, y_1^*, \dots, y_n^*, p^*)$   
конкурентное равновесие в модели  $\Gamma$ - $\Sigma$ ,  
то  $\{x_1^*, \dots, x_\ell^*\}$  - оптимально по Парето.

Доказ-во.  $\exists \{x_1, \dots, x_\ell\} \in X_0 =$   
 $= \{x \mid \exists y \in Y: \sum_{i=1}^{\ell} x_i \leq b + y\}$

$$\begin{cases} u_i(x_i) \geq u_i(x_i^*) \quad \forall i = 1, \dots, \ell \\ \exists i_0: u_{i_0}(x_{i_0}) > u_{i_0}(x_{i_0}^*) \end{cases}$$

$$\exists w_i \in X_i: u_i(w_i) > u_i(x_i)$$

$$x_i(t) = (1-t)x_i + tw_i$$

$$u_i(x_i(t)) \geq (1-t)u_i(x_i) + tu_i(w_i) > u_i(x_i) \Rightarrow \\ \Rightarrow u_i(x_i(t)) > u_i(x_i^*)$$

Рав. еще не может входить в  $x_0$ , то

$$\langle p^*, x_i(t) \rangle > \langle p^*, v_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_{ij} \langle p^*, y_j^* \rangle$$

$$\downarrow \rightarrow \lim_{t \rightarrow 0}$$

$$x_i(t) \rightarrow x_i$$

$$\langle p^*, x_i \rangle \geq \langle p^*, v_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_{ij} \langle p^*, y_j^* \rangle \quad \forall i$$

$\uparrow$  в конкурентном строке  
для  $i_0$  строке  $\rangle$

$$\langle p^*, \sum x_i \rangle > \langle p^*, v \rangle + 0 \langle p^*, \sum_{j=1}^m y_j^* \rangle$$

$$\langle p^*, y^* \rangle \geq \langle p^*, y \rangle$$

$$y \in Y$$

$$\langle p^*, \sum_{i=1}^l x_i \rangle > \langle p^*, v+y \rangle$$

на том, распределении, которое нужно

$$\sum x_i \leq v+y$$

$\nwarrow$   $p^*$  неотрицательно  $\Rightarrow$  противоречие  
 $\Rightarrow$  не существует такое, которое всегда возможно

Т.  $\{x_1^*, \dots, x_l^*\}$  - опт. по Парето

$\exists p^*$  и  $\{y_1^*, \dots, y_m^*\}$ ,  $y_j^* \in Y_j$ ,  $j=1, \dots, m$

$$1) \sum_{i=1}^l x_i^* \leq b + \sum_{j=1}^m y_j^*$$

2)  $y_j^*$  максимизирует  $\langle p^*, y_j \rangle$  по  $y_j \in Y_j$

3)  $x_i^*$  минимизирует  $\langle p^*, x_i \rangle$  по  $x_i \in X_i$   
и  $u_i(x_i) \geq u_i(x^*)$

$$G = b + Y - \sum_{i=1}^l M_i$$

$$M_i = \{x_i \in X_i \mid u_i(x_i) > u_i(x_i^*)\}$$

(последующее выполняется и для  $\geq$ )

$z \in G$ , если  $z \geq 0$ , то

$$z = b + y - \sum_{i=1}^l x_i \geq 0,$$

тогда от противного тем  $x_i^* \notin M_i$   $\Rightarrow$  противоречие

$$\Rightarrow \nexists z \geq 0$$

$$\exists p^* \geq 0 \Rightarrow \langle p^*, z \rangle \leq 0 \quad \forall z \in G$$

$$\forall x_i \in M_i, y_j \in Y_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_i \langle p^*, b_i \rangle + \sum_j \langle p_i^*, y_j \rangle \leq \sum_i \langle p_i^*, x_i \rangle$$

$\forall \bar{x}_i \in \bar{M}_i$

1) умножим на  $p^*$ :

$$\sum_i \langle p^*, b_i \rangle + \sum_j \langle p^*, y_j^* \rangle \geq \sum_i \langle p^*, x_i^* \rangle$$

$$\sum_j \langle p^*, y_j \rangle - \sum_j \langle p^*, y_j^* \rangle \leq \sum_i \langle p^*, x_i \rangle - \sum_i \langle p^*, x_i^* \rangle$$

$\forall x, y$  допустимых

Тогда  $\exists x = x^*, y_i = y^*$  при  $i \neq j$

Тогда остается только пер-во, доказывающее п. 2). Аналогично для 3).

Перераспределить  $a_{ij}$  и  $b$

$$b' = x_i^* - \frac{1}{l} \sum_{j=1}^n y_j^*$$

$$a_{ij} = \frac{1}{l}$$

одинаковые

# Модели динамического равновесия

↓ на ряду с ними есть

## Модели роста

$n$  - типов товаров

$[0; 1], [1; 2], \dots, [t; t+1]$

$T$  - число промежутков времени

Если считать  
зависимость  
затрат от  
выпуска м-  
нейкой - по-  
лучим модель  
Леонтьева

$Z_t \subset \mathbb{R}_+^{2n}$  - технологическое множество

$(x, y) \in Z_t$ ,  $y$  - выпуск,  $x$  - затраты

$\Phi_t : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$  - ф-я совокупного спроса

$P_t \in \mathbb{R}_+^n$  - цены

показатели постоянно внутри

$[t; t+1)$

$[t+1; t+2)$

$P_{t+1}$

$2n$  - потому  
что затраты  
+ выпуск

$$\Phi_t(p_t) \subseteq \mathbb{R}_+^n$$

Для того, чтобы задача не распадалась на  $T$  идентичных задач оптимизации, вводятся связи между промежуточными решениями  $\rightarrow$  динамическая задача.

$$(x, y) \in Z_t$$

$$\langle p_{t+1}, y \rangle - \langle p_t, x \rangle - \text{прибыль}$$

Потребитель выбирает  $c_t \in \Phi_t(p_t)$  - оптимальный вектор спроса

Производитель решает задачу оптимального (с точки зрения прибыли) выбора  $(x, y) \in Z_t$

Для согласования  $x$  и  $y$  выбирается посл-ть  $c_p$ .

Опред.  $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}$  - равновесие процесса, если: ~~если~~ потребитель оптимально выбирает

где себе черт где всех  $t$

$$2) (x_t, y_{t+1}) \in Z_t$$

$$3) \langle p_{t+1}, y_{t+1} \rangle - \langle p_t, x_t \rangle \geq$$

$$\geq \langle p_{t+1}, y_{t+1}' \rangle - \langle p_t, x_t' \rangle$$

$$\forall (x_t', y_t') \in Z_t$$

4)  $c_t \leq y_t - x_t$   $\forall t$  - условие остаточ-  
ные дефицита товара. (на последнем  
интервале допустим остаток  $\Rightarrow$  не =)

$$5) \langle p_t, c_t \rangle = \langle p_t, y_t - x_t \rangle$$

(закон Вальраса)

$$6) \langle p_T, x_T \rangle = 0 \quad (T < \infty)$$

(или = const)

$$\textcircled{3} \Rightarrow \forall t_1, t_2 \leq T$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} \langle p_t, y_t - x_t \rangle \geq \sum_{t=t_1}^{t_2} \langle p_t, y_t' - x_t' \rangle$$

$$\forall (x_t', y_{t+1}') \in Z_t, \quad t = t_1, \dots, t_2 - 1$$

$$y_{t_1}' = y_{t_1} \quad \text{и} \quad x_{t_2}' = x_{t_2}$$

y<sub>0</sub> - начальное предложение

Таким образом,

$$\max \sum_{t=0}^T \langle p_t, y_t' - x_t' \rangle$$

$$(x_t', y_t') \in Z_t, \quad y_0' = y_0$$

Лемма.

При выполнении

1)  $\Phi_t(p)$  определено  $\forall p \in \mathbb{R}_+^n$ ,

ограничено на  $C$

полу непрерывно сверху

при  $p \in \mathbb{R}_+^n$

2)  $\Phi_t(p)$  - выпуклый, огранич. в совокупности

3)  $\exists \beta > 0 \quad \langle p, c \rangle \leq \beta$  выполняется  $\forall p \in \mathbb{R}_+^{n-1-p}$ ,  
 $c \in \Phi_t(p)$

3)  $Z_t$  - замкнутое, выпуклое,  $(0,0) \in Z_t$ ,

$Z_t$  - огранич. в совокупности  $\forall t \in T$

4)  $\exists (\tilde{x}_t, \tilde{y}_{t+1}) \in Z_t, \quad t = 0, 1, \dots$

$\tilde{y}_t - \tilde{x}_t \geq \tilde{s} > 0, \quad \tilde{s} = \text{const}, \quad t = 1, 2, \dots$

5)  $y_0 > 0$

$\forall T < \infty \quad \exists$  равновесная траектория



маневр

Модель роста.

Модель Рамсея.

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

объем  
произ-ва  
(BBP)

потребл.

накопление

Можем добавить рос-во или экспорт-импорт,  
добавив слагаемое

$$V(t) = M(t) f\left(\frac{L(t)}{M(t)}\right)$$

$$\frac{d}{dt} M(t) = -\mu M(t) + \frac{I(t)}{b}$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = n L(t)$$

$$L(t) = L_0 e^{nt}$$

$$S(t) = \frac{I(t)}{Y(t)} \text{ - форма заражения}$$

$$I(t) = S(t) Y(t)$$

$$C(t) = (1 - S(t)) Y(t)$$

$$M(0) = M_0, L(0) = L_0$$

$\{L(t), M(t), Y(t), I(t), C(t)\}$  - траектории

$$k(t) = \frac{b M(t)}{L(t)} \quad c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}$$

$$\frac{Y}{L} = \frac{k(t)}{b} f\left(\frac{b}{k(t)}\right) = \tilde{f}(k(t))$$

$$\frac{dk(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{b M(t)}{L(t)} \right) = \frac{I(t)}{L(t)} -$$

$$- b(\mu + n) \frac{M(t)}{L(t)} = \frac{S(t) Y(t)}{L(t)} -$$

$$- (\mu + n) k(t) = S(t) \tilde{f}(k(t)) -$$

$$- \underbrace{(\mu + n) k(t)}_{\lambda}$$

$$\begin{cases} \frac{dk(t)}{dt} = S(t) \tilde{f}(k(t)) - \lambda k(t) \\ c(t) = (1 - S(t)) \tilde{f}(k(t)) \\ k(0) = k_0 = \frac{b M_0}{L_0} \end{cases}$$

эквивалентная система

# Функции денег:

- 1) Средство обращения
- 2) Мера стоимости
- 3) Средство сбережения

$M0$  - наличные

$M1 = M0 + \text{текущие сче́та}$

$M2 = M1 + \text{депозиты}$  ("потенциальные" св-ва)

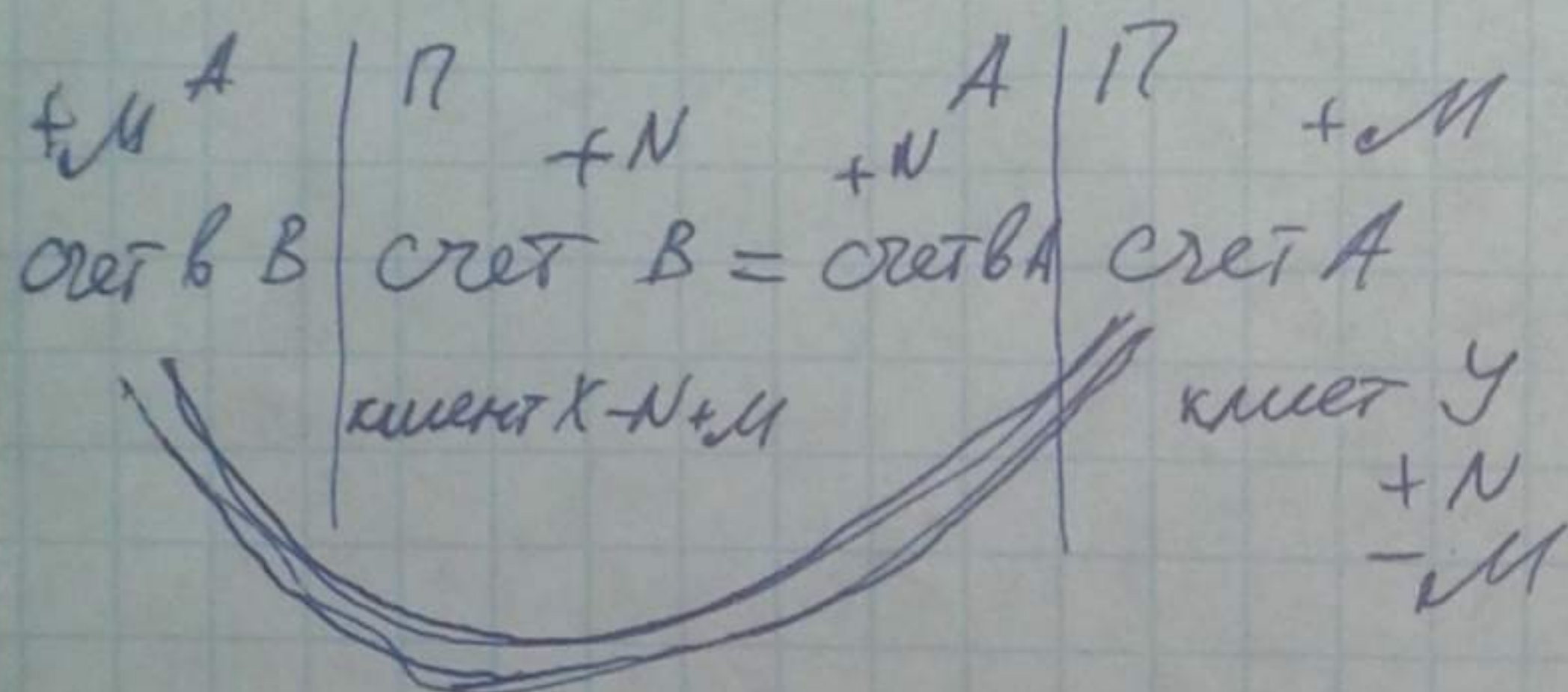
| Банк          |     | Банк                 |         |
|---------------|-----|----------------------|---------|
| баланс        |     | баланс               |         |
| активы        |     |                      | пассивы |
| касса         | 250 | организация банка    | (250)   |
|               |     | акции                | 250     |
|               |     | покупка оборудования | (240)   |
| касса         | 10  |                      | 250     |
| собств. св-ва | 240 |                      |         |
|               |     | выпуск (100)         |         |
| касса         | 110 | акции                | 250     |
| собств. св-ва | 240 | депозиты             | 100     |

резерв (актив, для ЦБ - пассив)  
нормы резервирования (% от всех вкладов)

|               |     |                 |      |
|---------------|-----|-----------------|------|
| касса         | 100 | акции           | 250  |
| резерв        | 10  | депозит         | 100  |
| собств. св-ва | 240 |                 |      |
|               |     | выдача кредитов | (50) |
| кредиты       | 50  | акции           | 250  |
| резерв        | 15  | депозит         | 100  |
| касса         | 95  | р/с             | 50   |
| собств. св-ва | 240 |                 |      |

оптималь (50)

A  $\begin{matrix} N \\ X \rightarrow Y \\ M \end{matrix}$  B



касса 40

кредит 50

резерв 60

депозит 50

депозит 100

Банк А

20% - норма резервирования

резерв 100

кредит 80

депозит 100

+80

Банк Б

резерв 80

кредит 64

депозит 80

+64

Банк В

резерв 64

кредит 51,2

депозит 64

+51,2

|           |   |             |
|-----------|---|-------------|
| резерв 20 | A | депозит 100 |
| кредит 80 |   |             |

$$\frac{1}{R} \times \text{изб. резерв} = \text{деньги}$$

норма  
резервиро-  
вания

$$\frac{1}{0,2} \cdot 80 = 400$$

ЦБ

|   |  |   |
|---|--|---|
| A |  | П |
|---|--|---|

Золото-валютный  
резерв

резервы комм. банков

кредиты

ценные бумаги  
правительства

налогосе, выпускаемое  
в обращение

средства правительства

- 1) операции на открытом рынке
- 2) изменение нормы резервирования
- 3) изменение учетной ставки

Продажа

центральный банк

Покупка

ЦБ

КБ

ЦБ

КБ

- центральный банк | - резерв

+ центральный банк |  
- резерв

+ центральный банк | + резерв

+ резерв |  
- центральный банк